

КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

*Институт физики*

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

**Часть I**

*Учебно-методическое пособие*

Казань – 2016

УДК 517.928

*Печатается по решению Учебно-методической комиссии*

*Института физики КФУ*

*Протокол № 6 от 15 апреля 2016 г.*

*Рецензенты:*

доцент кафедры общей математики КФУ, к.ф.-м.н. **В. А. Сочнева**;

доцент кафедры теории относительности

и гравитации КФУ, к.ф.-м.н. **Р.А. Даишев**

**Мухарлямов Р. К., Панкратьева Т. Н.**

**Асимптотические методы в теоретической физике. Часть I. Линейные обыкновенные дифференциальные уравнения на бесконечном интервале:** учебно-методическое пособие / Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева – Казань: Казан. ун-т, 2016. – 47 с.

Пособие предназначено для студентов института физики Казанского федерального университета и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др.

© Казанский университет, 2016

© Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева, 2016

# Оглавление

1	Введение . . . . .	4
2	Предварительные понятия . . . . .	6
2.1	$O$ – символика . . . . .	6
2.2	Асимптотические ряды . . . . .	9
3	Линейные дифференциальные уравнения второго порядка	13
3.1	Осциллирующие и экспоненциальные решения . . .	13
3.2	Метод ВКБ . . . . .	23
4	Линейные дифференциальные уравнения $n$ – го порядка .	27
4.1	Уравнения с почти постоянными коэффициентами .	27
4.2	Уравнения с асимптотически простыми корнями . .	29
5	Упражнения . . . . .	34
5.1	Примеры решения задач . . . . .	34
5.2	Задачи для самостоятельного решения . . . . .	44
5.3	Ответы . . . . .	45

# 1 Введение

Асимптотические методы математики находят применения в многочисленных задачах теоретической физики. Довольно часто физические модели описываются "трудными" уравнениями (дифференциальные, интегральные и т.п.). Асимптотические подходы позволяют упростить управляющие уравнения модели и при этом сохранить хорошую точность. Результат достигается за счёт локализации характерных параметров физического процесса и переменных в уравнениях. Существенным свойством этих методов является ограниченная точность, это есть следствие упрощения. Асимптотические методы в физике – это большее, чем просто способ решения поставленных задач. Они позволяют явно выстраивать связь и иерархию между физическими теориями. Например, переход от волновой оптики к геометрической связан с пренебрежением длиной волны по сравнению с размерами объекта, и для этого используется метод ВКБ (WKBJ - Вентцель, Крамер, Бриллюэн, Джеффрис). Аналогичная связь существует между квантовой и классической механикой. Эти примеры и многие другие подтверждают хорошо известную мысль, что развитие физики носит "асимптотический" характер.

В настоящем учебно-методическом пособии рассматри-

ваются асимптотические методы решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений при больших значениях независимой переменной. Это направление достаточно обширное. Мы ограничились освещением некоторых частных случаев. Приведены необходимые сведения и подробно разобраны примеры решений дифференциальных уравнений второго порядка. Данное пособие является дополнением к изданиям [1]-[5] и является методическим обеспечением курсов по выбору: Теория поля, Теория суперсимметрий, Калибровочные поля, Космология и др. Предназначено для студентов института физики КФУ, обучающихся по направлению "Физика".

## 2 Предварительные понятия

Фразы "асимптотическое представление" "асимптотический метод" ассоциируются с фразами "приблизённо" "замена сложного простым". Здесь сформулируем основные определения и положения, которые позволят понять, что под этим подразумевают в математике.

### 2.1 $O$ – символика

Напомним определение символов  $\sim$ ,  $o$ ,  $O$ .

Окрестностью точки  $a \in \mathbb{R}$  называется любой интервал  $(c, d)$ , содержащий точку  $a$ . Если из этого множества исключить саму точку  $a$ , то получим так называемую проколотую окрестность точки  $a$ . Пусть  $\alpha(x)$  и  $\beta(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ , которая может быть конечной или бесконечно удалённой точкой.

Обозначение

$$\alpha(x) = o(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow a \quad (1)$$

равносильно условию

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0.$$

В этом случае говорят, что функция  $\alpha(x)$  есть бесконечно малая по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

Выражение

$$\alpha(x) = O(\beta(x)) \text{ при } x \rightarrow a \quad (2)$$

означает

$$|\alpha(x)| \leq M|\beta(x)|,$$

где  $M$  – положительная постоянная. Иными словами, функция  $\alpha(x)$  ограничена по сравнению с  $\beta(x)$  при  $x \rightarrow a$ .

Формула

$$\alpha(x) \sim \beta(x) \text{ при } x \rightarrow a \quad (3)$$

подразумевает предел

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1.$$

В частности, если  $\alpha(x) = o(1)$  ( $x \rightarrow a$ ), то  $\alpha(x)$  – бесконечно малая величина при  $x \rightarrow a$ ; если же  $\alpha(x) = O(1)$  ( $x \rightarrow a$ ), то  $\alpha(x)$  – ограничена при  $x \rightarrow a$ .

Соотношения (1), (2) и (3) называются *асимптотическими формулами* или *асимптотическими оценками*.

Отметим некоторые свойства символов  $o$  и  $O$ :

$$o(\alpha(x)) + o(\alpha(x)) = o(\alpha(x)), \quad o(\alpha(x)) + O(\alpha(x)) = O(\alpha(x));$$

$$o(\alpha(x))o(\beta(x)) = o(\alpha(x)\beta(x)), \quad o(\alpha(x))O(\beta(x)) = o(\alpha(x)\beta(x));$$

$$o(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x)), \quad O(o(\alpha(x))) = o(\alpha(x)), \quad o(O(\alpha(x))) = o(\alpha(x)).$$

Здесь всюду  $x \rightarrow a$ .

Примеры:

$$x^4 = o(x^2) \text{ при } x \rightarrow 0;$$

$$x^2 = o(x^4) \text{ при } x \rightarrow \infty;$$

$$\ln x = o(x^q) \text{ при } x \rightarrow +\infty, q > 0;$$

$$\ln x = o(x^{-q}) \text{ при } x \rightarrow +0, q > 0;$$

$$\sin x = O(1) \text{ при } -\infty < x < +\infty;$$

$$\sin x \sim x \text{ при } x \rightarrow 0.$$

Знак  $\infty$ , если не оговорено противное, означает  $+\infty$ .

Символ "=" в формулах (1) и (2) не обладает всеми свойствами обычного знака равенства – свойство коммутативности не выполняется. Например,  $\ln(1+x) = o(x^{1/3})$  при  $x \rightarrow 0$ , но нельзя утверждать, что  $o(x^{1/3})$  при  $x \rightarrow 0$  есть  $\ln(1+x)$ .

Асимптотические оценки удобно использовать для численных расчётов. Рассмотрим простой пример. Имеет место предел

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x/2} = 1,$$

значит

$$\sqrt{1+x} - 1 \sim x/2 \text{ или } \sqrt{1+x} \sim 1 + x/2. \quad (4)$$

Используя оценку (4), найдём  $\sqrt{1,06} = \sqrt{1+0,06} = 1 + 0,6/2 = 1,03$ . Табличное значение даёт  $\sqrt{1,06} = 1,0296$ . Абсолютная погрешность равна  $\Delta X = |1,03 - 1,0296| = 0,0004$ ; относительная погрешность –  $\delta = \frac{|1,03-1,0296|}{1,0296} \times 100\% = 0,039\%$ . Такая точность приемлема для многих приложений.



В следующем пункте идея асимптотических оценок развивается дальше, что даёт основу для приближённых методов решения не только дифференциальных уравнений, но и расчёта других математических объектов, например, интегралов [7].

## 2.2 Асимптотические ряды

**Определение 1.** Пусть функции  $\varphi_n(x) \neq 0$ ,  $n = 1, 2, \dots$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$ . Последовательность  $\{\varphi_n(x)\}$  называется *асимптотической* при  $x \rightarrow a$ , если для любого  $n$  выполняется

$$\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x)) \quad (x \rightarrow a).$$

Иногда такую последовательность называют *калибровочной*.

Примеры калибровочных последовательностей:

$$\{(x - a)^n\}, \quad x \rightarrow a;$$

$$\{x^{-n}\}, \quad x \rightarrow \infty;$$

$$1, x^{1/3}, x^{2/3}, x, x^{4/3}, \dots \text{ при } x \rightarrow +0.$$

**Определение 2.** Пусть функция  $f(x)$  определены в некоторой проколотой окрестности точки  $a$  и  $\{\varphi_n(x)\}$  – калибровочная последовательность при  $x \rightarrow a$ . Функция  $f(x)$  разлагается в асимптотический ряд

$$f(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) \quad (x \rightarrow a), \quad (5)$$

где  $a_n$  – постоянные, если при любом натуральном числе  $N$  выполняется

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_N(x)) \quad (x \rightarrow a). \quad (6)$$

или

$$f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x) + O(\varphi_{N+1}(x)) \quad (x \rightarrow a). \quad (7)$$

Ряд (5) называется *асимптотическим разложением (приближением) функции  $f(x)$  по калибровочной последовательности  $\{\varphi_n(x)\}$  при  $x \rightarrow a$* . Равенство (6) называют *асимптотическим представлением порядка  $N$  функции  $f(x)$  по калибровочной последовательности  $\{\varphi_n(x)\}$  при  $x \rightarrow a$* . Слагаемое  $o(\varphi_N(x))$  определяет погрешность представления (6).

Определение 2 использовал Пуанкаре А. в своей работе, поэтому ряд (5) называют ещё *асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре*. Эрдеи А. определял это понятие более широко [6].

В определении ничего не говорится о сходимости асимптотического ряда (5). Для него существуют три возможности:

1. ряд сходится к  $f(x)$ ;
2. ряд сходится к  $g(x) \neq f(x)$ ;
3. ряд расходится.

Сходимость асимптотического ряда (5) не играет роли, а смысл его в том, что разность между функцией  $f(x)$  и частной суммой  $\sum_{n=1}^N a_n \varphi_n(x)$  ряда (5) мала по сравнению с наименьшим членом  $\varphi_N(x)$  этой частной суммы. Не всегда разложение функции в *сходящийся* ряд даёт *асимптотический* ряд для этой функции. Например, из сходящегося ряда Тейлора для экспоненты

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad -\infty < x < +\infty$$

не следует асимптотическое разложение вида

$$e^x \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad |x| \rightarrow a, \quad a > 1,$$

так как последовательность  $\{x^n\}$  не является асимптотической при  $|x| \rightarrow a > 1$ . Но, из ряда Тейлора для логарифма

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad |x| < 1$$

следует асимптотический ряд

$$\ln(1+x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad x \rightarrow 0.$$

Одна и та же функции может иметь не единственное асимптотическое разложение по разным калибровочным последовательностям. Но для фиксированной последовательности и функции имеет место теорема:

**Теорема 1.** *Асимптотическое разложение данной функции по данной калибровочной последовательности единственно.*

Интересно отметить, что две различные функции могут иметь одно и то же асимптотическое разложение.

С другим свойствами асимптотического разложения можно ознакомиться, например, в книге [7].

### 3 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка

В предыдущем разделе были определены понятия асимптотического разложения и представления функции, заданной в *явном виде*. Как правило, задачи в приложениях сложнее, чем просто найти асимптотику данной функции. Физическая величина, как функция от некоторой переменной, определяется в *неявном виде* – через различные уравнения (дифференциальные, интегральные и т.п.). Однако, не всегда удаётся получить асимптотику искомой функции в два этапа: сначала найти в явном виде функцию, а потом – её разложение. В этом случае опускают первый этап и определяют асимптотику непосредственно из уравнения.

Многие задачи, возникающие в теоретической физике, приводят к дифференциальным уравнениям второго порядка с переменными коэффициентами. В этом разделе мы рассмотрим приближённые методы решения уравнений вида

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \quad (8)$$

при  $x \rightarrow \infty$ .

#### 3.1 Осциллирующие и экспоненциальные решения

Решения (8) можно сравнить с решением некоторого эталонного уравнения. Если положить, например,  $p(x) = 0$ ,

$q(x) = \pm 1$ , то уравнение примет вид

$$y'' \pm y = 0. \quad (9)$$

Как известно, для него существуют, соответственно знаку перед  $y$ , по паре линейно независимых решений  $e^{\pm ix}$  и  $e^{\pm x}$ .

Зададимся вопросом: при каких условиях уравнения

$$y'' \pm q(x)y = 0 \quad (10)$$

имеют решения, эквивалентные на бесконечности функциям  $e^{\pm ix}$  или  $e^{\pm x}$ ? Ответ даст ряд теорем.

Положим функцию  $q(x)$  в уравнении (10) равной  $q(x) = 1 + \varphi(x)$ .

**Теорема А.** Если функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0,$

2.  $\int_0^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty,$

то уравнение

$$y'' + (1 + \varphi(x))y = 0 \quad (11)$$

обладает двумя решениями, имеющие соответственно асимптотический вид при  $x \rightarrow \infty$ :

$$y_{1,2} = e^{\pm ix} + o(1)$$

или в вещественной форме:

$$y_1 = \sin x + o(1), \quad y_2 = \cos x + o(1).$$

**Теорема В.** Если функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям:

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0,$

2.  $\int_0^{\infty} |\varphi(x)| dx < \infty,$

то уравнение

$$y'' - (1 + \varphi(x))y = 0 \quad (12)$$

обладает двумя решениями, имеющие соответственно асимптотический вид при  $x \rightarrow \infty$ :

$$y_{3,4} = e^{\pm x} + o(1).$$

Теоремы А и В говорят о виде первого члена асимптотических представлений решений уравнений (11) и (12). Этот член называют *главной асимптотикой* решения уравнения. Ниже будут сделаны дополнительные предположения о функции  $\varphi(x)$ , что позволит уточнить асимптотики  $y_{1,2}$  и  $y_{3,4}$ , то есть получить следующие по малости члены асимптотического представления и тем самым уменьшить погрешность приближений.

Процесс нахождения асимптотического разложения решения уравнения можно разделить на два этапа. Во первых, построить калибровочную последовательность  $\{\psi_k(x)\}$  и так

называемое *формальное асимптотическое решение*

$$\widehat{y} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \psi_k(x). \quad (13)$$

Частичная сумма

$$\widehat{y}_n = \sum_{k=1}^n c_k \psi_k(x)$$

ряда (13) должна удовлетворять условию

$$\widehat{y}_n'' \pm q(x)\widehat{y}_n = o(\psi_n(x)), \quad x \rightarrow \infty$$

для любого  $n$ . Во вторых, доказать, что существует решение  $y(x)$  уравнения (10), которое разлагается в построенный выше формальный ряд (13). Это означает, что для любого  $n$  выполняется условие:

$$y(x) - \widehat{y}_n(x) = O(\psi_{n+1}(x)), \quad x \rightarrow \infty.$$

Ещё раз отметим, что асимптотический ряд (13) не обязан сходиться.

## 1. Случай степенной асимптотики.

Предположим, что  $q(x) \in C[a, \infty)$  (непрерывная функция на полуоси  $[a, \infty)$ ),  $\lim_{x \rightarrow \infty} q(x) = 1$  и справедливо асимптотическое разложение

$$q(x) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} q_k x^{-k} = 1 + O(x^{-2}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (14)$$



Рассмотрим два случая.

**а) Осциллирующие решения.** Исходя из вида (14) функции  $q(x)$ , будем искать формальное асимптотическое решение уравнения

$$y'' + q(x)y = 0 \quad (15)$$

в виде ряда

$$\hat{y} = e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}. \quad (16)$$

Выбор ряда обосновывается ещё тем, что при  $x \rightarrow \infty$  он ведёт себя приблизительно как  $e^{ix}$ .

Так как решение линейного однородного уравнения определено с точностью до постоянного множителя, то можно положить  $c_0 = 1$ . Подставим ряды (14) и (16) в уравнение (15), сократим на  $e^{ix}$  и, приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ , получаем рекуррентную систему уравнений для  $c_k$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} -2ic_1 + q_2c_0 = 0, \\ -4ic_2 + 2c_1 + q_2c_1 + q_3c_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ -2kic_k + k(k-1)c_{k-1} + \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0, \quad k > 0. \end{array} \right. \quad (17)$$

Можно легко убедиться, что частичная сумма

$$\widehat{y}_n = e^{ix} \sum_{k=0}^n c_k x^{-k}$$

удовлетворяет условию

$$\widehat{y}_n'' + q(x)\widehat{y}_n = O(x^{-n-2}), \quad x \rightarrow \infty \quad (18)$$

для любого  $n$ .

Далее, нужно показать, что существует решение уравнения (15), которое разлагается в построенный выше формальный ряд (16). Другими словами, доказать, что для любого  $n$  выполняется условие:

$$y(x) - \widehat{y}_n(x) = O(x^{-n-1}), \quad x \rightarrow \infty. \quad (19)$$

В условиях (18) и (19) не пишутся асимптотические оценки вида  $O(e^{ix}x^{-n})$ , так как  $|e^{ix}| = 1$ . Сформулируем основной результат в виде теоремы.

**Теорема 2.** *Существует решение  $y_1(x)$  уравнения (15), которое разлагается в асимптотический ряд:*

$$y_1 \sim e^{ix} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (20)$$

где коэффициенты  $c_k$  определяются системой (17).

Существует второе решение  $y_2(x)$ , которое имеет асимптотическое разложение

$$y_2 \sim e^{-ix} \sum_{k=0}^{\infty} \widetilde{c}_k x^{-k}, \quad \widetilde{c}_0 = 1, \quad x \rightarrow \infty. \quad (21)$$

Если функция  $q(x)$  вещественная, то коэффициенты  $\tilde{c}_k$  комплексно-сопряжены коэффициентам  $c_k$ . Решения  $y_1$  и  $y_2$  линейно независимы, поэтому комбинация  $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$  с произвольными постоянными есть общее решение уравнения (15).

б) Экспоненциальные решения. Рассмотрим уравнение

$$y'' - q(x)y = 0. \quad (22)$$

Поведение решений уравнения (15) отличается от поведения решений уравнения (22) на бесконечности. У этого уравнения только одно решение (с точностью до постоянного множителя) быстро стремится к нулю при  $x \rightarrow \infty$ .

Будем рассуждать как и в предыдущем случае. Возьмём ряд

$$\hat{y} = e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k},$$

где коэффициенты находятся из системы уравнений

$$\left\{ \begin{array}{l} 2c_1 - q_2 c_0 = 0, \\ 4c_2 + 2c_1 - q_2 c_1 - q_3 c_0 = 0, \\ \dots\dots\dots \\ 2kc_k + k(k-1)c_{k-1} - \sum_{j=0}^{k-1} c_j q_{k+1-j} = 0, \quad k > 0. \end{array} \right. \quad (23)$$

**Теорема 3.** *Существует решение  $u_3(x)$  уравнения (22),*

которое разлагается в асимптотический ряд:

$$y_3 \sim e^{-x} \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{-k}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (24)$$

где коэффициенты  $c_k$  определяются системой (23).

Решение, которое неограниченно при  $x \rightarrow \infty$ , имеет асимптотическое разложение

$$y_4(x) \sim e^x \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k x^{-k}, \quad \tilde{c}_0 = 1, \quad x \rightarrow \infty. \quad (25)$$

Коэффициенты  $\tilde{c}_k$  получаются из рекуррентной системы, аналогичной системе (23) (они не совпадают). Решения  $y_3$  и  $y_4$  линейно независимы.

Доказательства формул (20) и (21) принципиально не отличаются. Утверждения (24) и (25) обосновываются по разному. Подробно об этом можно почитать в [9].

**Замечание.** Теоремы 2 и 3 сформулированы при условии  $q(x) = 1 + O(x^{-2})$ . Пусть  $\lambda$  – постоянная. Если  $q(x) = \lambda^2 + O(x^{-2})$ , то теоремы так же остаются верными, но главные члены асимптотики имеют вид  $e^{\pm i\lambda x}$  или  $e^{\pm \lambda x}$ . Действительно, при замене  $z = \lambda x$  получаем  $q(z) = 1 + O(z^{-2})$ .

## 2. Обобщение второго условия теорем А и В.

Заменим второе условие теорем А и В условием

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\varphi(x)|^n dx < \infty,$$

где  $n \geq 1$  – целое число. В зависимости от значения  $n$  уравнения (10) имеют разные асимптотики решений. Рассмотрим случай  $n = 2$ .

**Теорема С.** *Если функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям:*

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0,$
2.  $\int_0^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty,$

*то уравнение*

$$y'' + (1 + \varphi(x))y = 0$$

*обладает двумя решениями, имеющими асимптотический вид при  $x \rightarrow \infty$ :*

$$y_{1,2} = \exp \left( \pm ix \pm \frac{i}{2} \int_0^x \varphi(t) dt \right) [1 + o(1)].$$

Здесь, решения  $y_{1,2}$  не всегда ограничены [10] в отличие от теоремы А.

**Теорема D.** *Если функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям:*

1.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0,$
2.  $\int_0^{\infty} |\varphi(x)|^2 dx < \infty,$

*то уравнение*

$$y'' - (1 + \varphi(x))y = 0$$

обладает двумя решениями, имеющими асимптотический вид при  $x \rightarrow \infty$ :

$$y_{3,4} = \exp \left( \pm x \pm \frac{1}{2} \int_0^x \varphi(t) dt + o(1) \right).$$

Для  $n \geq 3$  асимптотическое разложение содержат многократные интегралы от функции  $\varphi(x)$  (см. [10]).

### 3. Преобразования Лиувилля.

Приведённые выше выкладки и теоремы не применимы к более общим уравнениям (8). Однако исследования этих уравнений сводятся к уравнениям (10) с помощью следующих преобразований.

*Первое преобразование Лиувилля*

$$y = z(x) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_a^x p(t) dt \right\} \quad (26)$$

приводит уравнение (8) к виду (10):

$$z'' + (q - p^2/4 - p'/2)z = 0. \quad (27)$$

*Второе преобразование Лиувилля*

$$y(x) = z(s(x)), \quad s(x) = \int_a^x |q(t)|^{1/2} dt \quad (28)$$

приводит уравнение (8) к виду

$$z''_{ss} + P(s)z'_s + \text{sign } q \cdot z = 0.$$

Сделав в уравнении (15) замену

$$s = \int_a^x |q(t)|^{1/2} dt, \quad y = v(s)q^{-1/4}(x), \quad (29)$$

получим новое уравнение для функции  $v(s)$ :

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + v \left( 1 + \frac{5}{16} \frac{q'(x)^2}{q(x)^3} - \frac{1}{4} \frac{q''(x)}{q(x)^2} \right) = 0,$$

где  $s$  и  $x$  связаны первой формулой из замены (29).

Если  $q(x)$  в исходных уравнениях (10) не удовлетворяет условиям теорем 2, 3, А, В, С или D, то для широкого класса функций  $q(x)$  с помощью последовательности преобразований Лиувилля можно этого добиться для изменённого уравнения. Эта мысль отражается в методе Лиувилля–Грина (1837 г.), называемый ещё *методом ВКБ*. В физике он носит название *квазиклассическое приближение*, *коротковолновое приближение*, *высокочастотное приближение* и т.д.

### 3.2 Метод ВКБ

*Методом ВКБ* называют метод построения асимптотики решения уравнений

$$y'' \pm k^2 q(x)y = 0, \quad (30)$$

где  $k$  – некоторый параметр. В предыдущем разделе для построения асимптотического решения уравнений  $y'' \pm q(x)y = 0$  использовались, например, степенные функции. Метод ВКБ

предполагает в качестве асимптотической последовательности, так же и другие функции. Данный метод применяется для решения задач квантовой механики, оптики, теории плазмы, гидродинамики и т.д..

Погрешность асимптотического представления решения уравнения (30) зависит не только от переменной  $x$ , но и от параметра  $k$ . В зависимости от того, как локализуются  $k$  и  $x$ , выбирается способ построения асимптотического представления и результаты, чаще всего, отличаются. Возможны следующие варианты асимптотик решений уравнения (30):

1. при  $x \rightarrow \infty$ ;
2. при  $k \rightarrow \infty$ ;
3. двойная асимптотика, то есть асимптотическое приближение, справедливое и при  $x \rightarrow \infty$ ,  $k$  фиксированном, и при  $k \rightarrow \infty$ ,  $x$  фиксированном, и при  $k \rightarrow \infty$ ,  $x \rightarrow \infty$ .

В рамках этого учебно-методического пособия мы рассмотрим первый случай. В уравнении (30) положим  $k = 1$ :

$$y'' + q(x)y = 0. \quad (31)$$

**Теорема 4.** Пусть коэффициент  $q(x) > 0$  в уравнении (31) обладает свойствами:

1.  $q(x) \in C^\infty[a, \infty)$  (бесконечно дифференцируема на множестве  $[a, \infty)$ );



$$2. \int^{\infty} \left( \left| \frac{q''}{q^{3/2}} \right| + \left| \frac{q'^2}{q^{5/2}} \right| \right) dx < \infty;$$

3. существуют формальные асимптотические решения уравнения (31) вида

$$y_{1,2} \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp(\pm iS(x)) \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \right], \quad (32)$$

где  $\varphi_k(x)$  – калибровочные функции,  $S(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)} dt$ .

Тогда существуют решения уравнения (31), для которых эти формальные асимптотические решения являются асимптотическими разложениями при  $x \rightarrow \infty$ .

Для решений уравнения

$$y'' - q(x)y = 0, \quad q(x) > 0 \quad (33)$$

имеются асимптотические разложения при  $x \rightarrow \infty$  вида

$$y_{3,4} \sim q^{-\frac{1}{4}}(x) \exp(\pm S(x)) \left[ 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k(x) \right], \quad (34)$$

если выполнены условия теоремы 4.

Условия теоремы 4 выполнены для широкого класса функций  $q(x)$ , например:

- для любых полиномов, которые стремятся к  $\infty$  при  $x \rightarrow \infty$ ;
- для функции  $q(x)$ , имеющую асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  вида

$$q(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{-\gamma_k}, \quad \gamma_{k+1} > \gamma_k, \quad \gamma_0 > -2;$$

- для  $q(x) = a(\ln x)^\alpha$ ,  $-\infty < \alpha < +\infty$ ;
- для функций вида  $q(x) = \exp(P_k(x))$ ,  $q(x) = \exp(\exp P_k(x))$ ,  $q(x) = \exp[P_k(x)\exp(P_l(x))]$  и т.п., где  $P_l(x)$  – полиномы степени  $l$ , лишь бы  $q(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Замечание.** Проще искать формальное асимптотическое решение уравнения (31), не переходя к новой переменной. Достаточно сделать замену неизвестной функции:

$$y(x) = z(x)q^{-1/4}(x) \exp(iS(x)), \quad S(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)} dt.$$

Решение  $z(x)$  полученного уравнения

$$z'' + z' \left( 2iq^{1/2}(x) - \frac{1}{2} \frac{q'(x)}{q(x)} \right) + z \left( \frac{5}{16} \frac{q'(x)^2}{q(x)^2} - \frac{1}{4} \frac{q''(x)}{q(x)} \right) = 0$$

зачастую можно найти в виде формального ряда, первый член которого равен единице.

## 4 Линейные дифференциальные уравнения $n$ – го порядка

В физических приложениях встречаются системы дифференциальных уравнений и уравнения высших порядков. Систему можно свести к одному уравнению высшего порядка и обратно. В этом разделе мы рассмотрим асимптотическое поведение решений для линейных уравнений

$$y^{(n)} + q_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \dots + q_0(x)y = 0 \quad (35)$$

на интервале  $x \in [a, +\infty)$  с комплекснозначными непрерывными коэффициентами. Уравнение вида

$$p^n + q_{n-1}(x)p^{n-1} + \dots + q_0(x) = 0 \quad (36)$$

назовём *характеристическим*. Асимптотика решений уравнения (35) при  $x \rightarrow \infty$  зависит от поведения на бесконечности корней  $p_1(x), \dots, p_n(x)$  уравнения (36). Нахождение этих корней является непростой задачей. Ниже изложены относительно простые случаи.

### 4.1 Уравнения с почти постоянными коэффициентами

Хорошо известно как решать линейные дифференциальные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами [1]. Укажем условия, при которых эти уравнения являются эталонными для уравнения (35), то есть оно имеет реше-

ния, эквивалентные на бесконечности функциям  $e^{\lambda_i x}$ . Случай  $x^s e^{\lambda_i x}$  рассматриваться не будет. Здесь  $\lambda_i = \text{const}$ .

**Утверждение 1.** *Если в уравнении (35) коэффициенты имеют вид*

$$q_k(x) = q_k^0 + r_k(x), \quad (37)$$

где  $q_k^0$  – постоянные, и выполнены условия:

$$1. \int_a^\infty |r_k(x)| dx < \infty, \quad 1 \leq k \leq n,$$

2. корни  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  уравнения

$$\lambda^n + q_{n-1}^0 \lambda^{n-1} + \dots + q_0^0 = 0$$

различны,

тогда уравнение (35) имеет такую фундаментальную систему решений (ФСР)  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , что

$$y_j(x) = e^{\lambda_j x} [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (38)$$

Эту асимптотику можно  $n$  раз дифференцировать:

$$y_j^{(k)}(x) = \lambda_j^k e^{\lambda_j x} [1 + o(1)], \quad 0 \leq k \leq n. \quad (39)$$

**Утверждение 2.** *Пусть выполнены равенства (37) и условия:*

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} r_k(x) = 0, \quad 1 \leq k \leq n,$$

2.  $\text{Re} \lambda_j \neq \text{Re} \lambda_k$  при всех  $j \neq k$ ,

тогда имеем асимптотику

$$y_j(x) = \exp\{\lambda_j x + o(x)\}, \quad x \rightarrow \infty. \quad (40)$$

## 4.2 Уравнения с асимптотически простыми корнями

Характеристическое уравнения для линейного дифференциального уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами имеет не больше  $n$  корней. Некоторые корни могут совпадать и их называют кратными, в противном случае – простыми корнями. Для более сложного уравнения (35) корни характеристического уравнения (36) зависят от переменной  $x$ . Однако, и здесь можно ввести аналог простого корня.

Пусть при некотором  $j$  существуют пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_j(x)}{p_k(x)} = c_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n, \quad (41)$$

конечные или бесконечные. Корень  $p_j(x)$  характеристического уравнения (36) называется *асимптотически простым*, если  $c_{jk} \neq 1$  при всех  $k \neq j$ . Условие (41) означает, что все корни  $p_j(x)$  отличаются при  $x \rightarrow \infty$ . В дальнейшем предполагается, что  $q_k(x) \in C^2[a, \infty)$ ,  $0 \leq k \leq n - 1$ . Рассмотрим два случая.

### 1. Корни одного порядка.

**Утверждение 3.** Пусть  $q_0(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$ , все корни уравнения (36) асимптотически простые, и пусть  $c_{jk} \neq 0$ ,  $c_{jk} \neq 1$  при всех  $j, k, j \neq k$ . Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x) q_0^{-1+k/n}(x) = a_k, 1 \leq k \leq n-1, \quad (42)$$

и асимптотика корней имеет вид

$$p_j(x) = [\lambda_j + o(1)] q_0^{1/n}(x), x \rightarrow \infty, \quad (43)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – корни уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + a_1 \lambda + 1 = 0. \quad (44)$$

Условие (42) означает, что все члены  $q_k(x) y^{(k)}$  уравнения (35) одинаково влияют при  $x \gg 1$  на асимптотику решений.

Обратное утверждение также справедливо:

**Утверждение 4.** Если асимптотика всех корней уравнения (36) имеет вид (43), где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  – различные ненулевые числа, то пределы (42) существуют и конечны.

Введём функции

$$l(x, p) = p^n + q_{n-1}(x) p^{n-1} + \dots + q_0(x), \quad (45)$$

$$p_j^{(1)}(x) = -\frac{p_j'(x)}{2} \frac{l_{pp}''(x, p_j(x))}{l_p'(x, p_j(x))}, \quad (46)$$

$$\varphi_{jk}(x) = p_j(x) - p_k(x) + p_j^{(1)}(x) - p_k^{(1)}(x), \quad (47)$$

$$\tilde{y}_j(x) = \exp \left( \int_a^x [p_j(t) + p_j^{(1)}(t)] dt \right), \quad (48)$$

где

$$l'_p(x, p_j(x)) = \frac{\partial l(x, p)}{\partial p} \Big|_{p=p_j(x)}, \quad l''_{pp}(x, p_j(x)) = \frac{\partial^2 l(x, p)}{\partial p^2} \Big|_{p=p_j(x)}.$$

**Утверждение 5.** Пусть выполнены условия (43) и

- 1) уравнение (44) не имеет кратных корней;
- 2) при некотором  $j$  и при всех  $k \neq j$  функции  $\operatorname{Re} \varphi_{jk}(x)$  не меняют знак при  $x \gg 1$ ;
- 3)  $\int_0^\infty \alpha(x) dx < \infty$ , где

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (|q'_k|^2 |q_0|^{-2+(2k-1)/n} + |q''_k| |q_0|^{-1+(k-1)/n}). \quad (49)$$

Тогда уравнение (35) имеет такое решение  $y_j(x)$ , что

$$y_j(x) = \tilde{y}_j(x)[1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (50)$$

Если условие 2) выполнено при всех  $j$ , то уравнение (35) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$  вида (50).

Для уравнения

$$y'' \pm q(x)y = 0$$

условие 3) утверждения 4 принимает вид условия 2 из теоремы 4.

**Утверждение 6.** Пусть выполнены условия 1) - 3) утверждения 4 и так же оценка

$$4) \quad q'_k(x) = o(q_0^{1-(k-1)/n}(x)), \quad x \rightarrow \infty,$$

тогда при  $0 \leq m \leq n$  имеем

$$y_j^{(m)}(x) = p_j^{(m)}(x)[1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty. \quad (51)$$

## 2. Один из корней меньшего порядка роста.

**Утверждение 7.** Пусть  $q_1(x) \neq 0$  при  $x \gg 1$  и

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{p_n(x)}{p_k(x)} = 0, \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (52)$$

а все остальные пределы (41) конечны, если  $k \neq n$ . Тогда существуют конечные пределы

$$\lim_{x \rightarrow \infty} q_k(x)[q_1(x)]^{(k-n)/(n-1)} = a_k, \quad 0 \leq k \leq n-1, \quad (53)$$

где  $a_0 = 0$ , и асимптотика корней уравнения (36) при  $x \rightarrow \infty$  имеет вид

$$p_k(x) = [\lambda_k + o(1)]q_1^{1/(n-1)}(x), \quad 1 \leq k \leq n-1, \quad (54)$$

$$p_n(x) = \frac{-q_0(x) + o(q_0(x))}{q_1(x)},$$

где  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$  – корни уравнения

$$\lambda^{n-1} + a_{n-1}\lambda^{n-2} + \dots + a_2\lambda + 1 = 0. \quad (55)$$

Условие (52) означает, что корень  $p_n(x)$  является бесконечно малой величиной по сравнению с остальными корнями  $p_1(x), p_2(x), \dots, p_{n-1}(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ .

**Утверждение 8.** Пусть справедливы равенства (54) и условия 1) и 2) для всех  $j$  утверждения 4, а так же

3)  $\int_0^\infty (|q'_k|^2 |q_1|^{-2+(2k+1)/(n-1)} + |q''_k| |q_1|^{-1+k/(n-1)}) dx < \infty$  для всех  $k$ .



Тогда уравнение (35) имеет ФСР  $\{y_1, \dots, y_n\}$ , для которых справедлива асимптотическая формула (50).

Если ещё добавить условие  $q'_k(x) = o(q_1^{(n+1-k)/(n-1)}(x))$  при  $x \rightarrow \infty$  и при всех  $k$ , то для  $\{y_1, \dots, y_{n-1}\}$  справедлива формула (51).

## 5 Упражнения

### 5.1 Примеры решения задач

**Пример 1.** Уравнение вида

$$y'' - xy = 0 \quad (56)$$

называется уравнением *Эйри*. Найдём главные асимптотики его решений при  $x \rightarrow \pm\infty$ .

Сравнивая его с (8), получим  $p(x) = 0$  и  $q(x) = -x$ . Изначально, уравнение (56) не удовлетворяет условиям теорем 2, 3, А, В, С и D. Преобразуем его.

Сначала рассмотрим случай  $x > 0$ . Применяем вторую замену Лиувилля (28)

$$s(x) = \int_0^x \tau^{1/2} d\tau = \frac{2}{3}x^{3/2},$$

следовательно

$$x = \left(\frac{3s}{2}\right)^{2/3}$$

и уравнение (56) для функции  $z(s) = y(x(s))$  приобретает вид

$$\frac{d^2 z}{ds^2} + \frac{1}{3s} \frac{dz}{ds} - z = 0.$$

Применяем к нему первую замену Лиувилля (26):

$$z(s) = u(s) \exp \left[ -\frac{1}{6} \int_1^s \tau^{-1} d\tau \right] = s^{-1/6} u(s),$$

получаем уравнение вида (22) на новую неизвестную функцию  $u(s)$ :

$$\frac{d^2u}{ds^2} - \left(1 - \frac{5}{36s^2}\right) u = 0.$$

Оно удовлетворяет условиям **теоремы 3**. Линейно независимые решения этого уравнения имеют асимптотические разложения:

$$u_1(s) = e^{-s}(1 + O(s^{-1})), \quad u_2(s) = e^s(1 + O(s^{-1})) \quad \text{при } s \rightarrow +\infty.$$

Переходим обратно к переменной  $x$  и функции  $y(x)$ :

$$y_1 = x^{-1/4} \exp \left[ -\frac{2}{3}x^{3/2} \right] [1 + O(x^{-3/2})], \quad (57)$$

$$y_2 = x^{-1/4} \exp \left[ \frac{2}{3}x^{3/2} \right] [1 + O(x^{-3/2})] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (58)$$

В случае  $x < 0$  сделаем замену  $x = -t$  и получаем уравнение

$$y''_{tt} + ty = 0, \quad t > 0. \quad (59)$$

Далее, поступаем как в предыдущем случае. Но можно обойтись и без преобразований Лиувилля, обратив внимание на то, что уравнение (59) удовлетворяет условиям **теоремы 4**. Найдём

$$S(t) = \int_0^t \tau^{1/2} d\tau = \frac{2}{3}t^{3/2}$$

и, следовательно, имеются такие решения, что при  $t \rightarrow +\infty$ :

$$\tilde{y}_{1,2} = t^{-1/4} \exp \left[ \pm \frac{2i}{3}t^{3/2} \right] [1 + O(t^{-3/2})]$$

или в вещественной форме и с переменной  $x \rightarrow -\infty$ :

$$y_3 = |x|^{-1/4} \left[ \sin \left( \frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) + O(|x|^{-3/2}) \right], \quad (60)$$

$$y_4 = |x|^{-1/4} \left[ \cos \left( \frac{2}{3} |x|^{3/2} \right) + O(|x|^{-3/2}) \right]. \quad (61)$$

Решение, которому соответствует асимптотика (57), определяет функцию Эйри:

$$\text{Ai}(x) = \frac{y_1(x)}{2\sqrt{\pi}}. \quad (62)$$

Асимптотическое приближение функции Эйри при  $x \rightarrow -\infty$  осциллирует:

$$\text{Ai}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}|x|^{1/4}} \left[ \sin \left( \frac{2}{3} |x|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) + O(|x|^{-3/2}) \right]. \quad (63)$$

Эта функция часто встречается в задачах о распространении волн. Она описывает переходные процессы, например, переход от света к тени.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$y'' - (x^2 - a^2)y = 0, \quad a \geq 0. \quad (64)$$

Его решения называют *функциями Вебера-Эрмита* или *функциями параболического цилиндра*. Это уравнение возникает из уравнений Лапласа, Пуассона и других, когда используют метод разделения переменных для уравнений в частных производных второго порядка. Уравнения Лапласа и Пуассона фигурируют в задачах электромагнетизма, тепловых процессах, теории упругости и т.д.

Исследуем асимптотику решений при  $x \rightarrow +\infty$ . Функция  $q(x) = x^2 - a^2$  удовлетворяет первому и второму условию теоремы 4. Пусть  $x > 0$ , тогда

$$\sqrt{q(x)} = \sqrt{x^2 - a^2} = x\sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} = x - \frac{a^2}{2x} + O\left(\frac{1}{x^3}\right),$$

$$q^{-1/4}(x) \sim x^{-1/2}, \quad S(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)} dt = \frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{2} \ln x + o(1), \quad x \rightarrow +\infty.$$

Для получения последних асимптотических оценок использовалось известное разложение из математического анализа:

$$(1+y)^m = 1 + my + \frac{m(m-1)y^2}{2!} + \dots \\ \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)y^n}{n!} + o(y^n), \quad |y| < 1. \quad (65)$$

В нашем случае  $y = a^2/x^2$  и  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ .

Из формулы (34) следуют главные асимптотики

$$y_1 \sim x^{-(a^2+1)/2} e^{x^2/2}, \quad y_2 \sim x^{(a^2+1)/2} e^{-x^2/2}. \quad (66)$$

**Пример 3.** Выписать три члена асимптотики при  $x \rightarrow \infty$  общего решения уравнения

$$2xy'' + 7y' + 2u = 0. \quad (67)$$

Во избежании громоздких вычислений в начале применим второе преобразование Лиувилля:

$$s(x) = \int_a^x |q(t)|^{1/2} dt = \int_a^x \frac{dt}{t^{1/2}} = 2\sqrt{x},$$

тогда

$$y''_{ss} + \frac{6}{s} y'_s + y = 0.$$

После первого преобразования Лиувилля

$$y = z(s) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int^s p(t) dt \right\} = z(s) \exp \left\{ -3 \int^s \frac{dt}{t} \right\} = z(s) s^{-3}$$

последнее уравнение изменится:

$$z''_{ss} + z \left( 1 - \frac{6}{s^2} \right) = 0.$$

Оно удовлетворяет условиям **теоремы 2**. Согласно этой теореме одно решение ищем в виде

$$z_1(s) = e^{is} \sum_{k=0}^{\infty} c_k s^{-k}.$$

Положим  $c_0 = 1$ , тогда из системы (17) получим  $c_1 = 3i$ ,  $c_2 = -3$  и  $c_k = 0$  при  $k > 2$ . Следовательно,

$$z_1 = e^{is}(1 + 3is^{-1} - 3s^{-2}).$$

Так как в уравнении функция  $1 - 6/s^2$  вещественная, то коэффициенты  $\tilde{c}_k$  во втором решении

$$z_2(s) = e^{-is} \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{c}_k s^{-k}.$$

комплексно-сопряжены коэффициентам  $c_k$ :

$$z_2 = e^{-is}(1 - 3is^{-1} - 3s^{-2}).$$

Как видим, асимптотические ряды  $z_{1,2}$  обрываются, следовательно, функции  $z_{1,2}$  есть точные решения.

Возвращаемся к старым переменным  $x$  и функции  $y(x)$ :

$$y_{1,2} = x^{-3/2} e^{\pm 2i\sqrt{x}} \left( 1 \pm \frac{3i}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{4x} \right).$$

**Пример 4.** Основное уравнение квантовой механики – уравнение Шрёдингера. В одномерном случае для одной частицы оно выглядит так

$$\hbar^2 \psi''_{rr} + 2m(\mathcal{E} - U(r))\psi(r) = 0,$$

где  $\psi(r)$  – волновая функция, которая определяет состояния квантово-механической системы.

При условиях  $\mathcal{E} > 0$ ,  $\int_0^\infty |U(r)|dr < \infty$  согласно теореме В, имеются линейно независимые решения с асимптотиками

$$\psi_{1,2}(r) = e^{\pm ikr} + o(1), \quad r \rightarrow \infty,$$

где  $k = \sqrt{2m\mathcal{E}}/\hbar$ .

**Пример 5.** Найти главную асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  уравнения

$$y'' - (1 + x^{-\alpha} \sin x)y = 0, \quad 1/2 < \alpha \leq 1. \quad (68)$$

Сравнивая с уравнением (12), получим  $\varphi(x) = x^{-\alpha} \sin x$ . Условие  $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$  справедливо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-\alpha} \sin x = 0.$$

Оценка  $\int_0^\infty |\varphi(x)|^n dx < \infty$  выполняется при  $n = 2$ :

$$\int_0^\infty |x^{-\alpha} \sin x|^2 dx \leq \int_0^\infty |x^{-2\alpha}| dx < \infty.$$

Следовательно, согласно теореме D:

$$y_{1,2} = \exp \left( \pm x \pm \frac{1}{2} \int^x t^{-\alpha} \sin t dt \right) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty.$$

Проинтегрировав два раза по частям, получим

$$\begin{aligned} \int^x t^{-\alpha} \sin t dt &= -\frac{\cos x}{x^\alpha} - \frac{\alpha \sin x}{x^{\alpha+1}} - \alpha(\alpha+1) \int^x \frac{\sin t}{t^{\alpha+2}} dt = \\ &= -\frac{\cos x}{x^\alpha} + O(x^{-\alpha-1}), \quad x \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$y_{1,2} = \exp \left( \pm x \mp \frac{1}{2} x^{-\alpha} \cos x \right) [1 + o(1)], \quad x \rightarrow \infty.$$

**Пример 6.** Выписать несколько членов асимптотики при  $x \rightarrow \infty$  решения уравнения

$$y'' + (x + \sin x)y = 0. \quad (69)$$

Уравнение удовлетворяет условиям теоремы 4. Здесь переход к другой переменной приведёт к громоздким расчётам, ограничимся заменой неизвестной функции:

$$y(x) = z(x)q^{-1/4}(x) \exp(iS(x)), \quad S(x) = \int_1^x \sqrt{q(t)} dt.$$

Для нашего уравнения:

$$y(x) = z(x)(x + \sin x)^{-1/4} \exp \left( i \int_1^x \sqrt{t + \sin t} dt \right).$$



Замена приводит к уравнению

$$z'' + p_1(x)z' + q_1(x)z = 0, \quad (70)$$

где

$$p_1(x) = 2i(x + \sin x)^{1/2} - \frac{1 + \cos x}{2(x + \sin x)},$$

$$q_1(x) = \frac{5}{16} \frac{(1 + \cos x)^2}{(x + \sin x)^2} + \frac{\sin x}{4(x + \sin x)}.$$

Разложим их в ряды при  $x \rightarrow \infty$ :

$$p_1(x) = \sum_{k=-1}^{\infty} R_k(x)x^{-k/2}, \quad q_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k(x)x^{-k},$$

где

$$R_{-1} = 2i, \quad R_0 = 0, \quad R_1 = i \sin x, \quad R_2 = -\frac{1}{2}(1 + \cos x),$$

$$R_3 = -\frac{i}{4} \sin^2 x, \quad R_4 = \frac{1}{2} \sin x(1 + \cos x),$$

$$R_5 = \frac{i}{8} \sin^3 x, \quad R_6 = -\frac{1}{2}(1 + \cos x) \sin^2 x, \dots,$$

$$L_1 = \frac{1}{4} \sin x, \quad L_2 = \frac{5}{16}(1 + \cos x)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 x,$$

$$L_3 = \frac{1}{4} \sin^3 x - \frac{5}{8} \sin x(1 + \cos x)^2, \dots$$

Чтобы понять почему получаются такие ряды, рассмотрим пример асимптотического разложения функции  $(x + \sin x)^{1/2}$  из  $p_1(x)$ . Преобразуем её:

$$(x + \sin x)^{1/2} = x^{1/2} \left(1 + \frac{\sin x}{x}\right)^{1/2} = x^{1/2} (1 + y)^{1/2}, \quad (71)$$

где  $y = \frac{\sin x}{x}$ . Из свойства  $|\sin x| \leq 1$  следует, что  $y \rightarrow 0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Значит, последовательность  $\{y^n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  будет асимптотической при  $y \rightarrow 0$  и формула (65) даст асимптотическое представление

$$(1 + y)^{1/2} = 1 + \frac{y}{2} - \frac{y^2}{8} + \frac{y^3}{16} + O(y^4), \quad y \rightarrow 0.$$

Подставим в (71) и вернёмся к  $x$ :

$$\begin{aligned} (x + \sin x)^{1/2} &= x^{1/2} + \frac{\sin x}{2} \cdot x^{-1/2} - \frac{\sin^2 x}{8} \cdot x^{-3/2} + \\ &+ \frac{\sin^3 x}{16} \cdot x^{-5/2} + O(x^{-7/2}). \end{aligned}$$

Асимптотическое разложение  $z(x)$  будем искать в виде

$$z(x) \sim 1 + \sum_{k=3}^{\infty} g_k(x) x^{-k/2}, \quad x \rightarrow \infty.$$

Предполагаем, что  $g_k(x)$  – ограниченные и периодические функции с периодом  $2\pi$ . Подставляем все ряды в уравнение (70) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях. В результате получим систему уравнений на функции  $g_k(x)$ :

$$\begin{aligned} 2ig'_3 + \frac{1}{4} \sin x &= 0, \quad 2ig'_4 + g''_3 = 0, \\ 2i \left( g'_5 - \frac{3}{2} g_3 \right) + ig'_3 \sin x + \frac{5}{16} (1 + \cos x)^2 - \frac{1}{4} \sin^2 x + g''_4 &= 0, \\ 2i(g'_6 - 2g_4) + ig'_4 \sin x - \frac{1}{2} g'_3 (1 + \cos x) + \frac{1}{4} g_3 \sin x + g''_5 - 3g'_3 &= 0, \\ \dots\dots\dots \end{aligned}$$

Первые два уравнения имеют периодические решения:

$$g_3 = -\frac{i}{8} \cos x + A_3, \quad g_4 = -\frac{1}{16} \sin x + A_4.$$

Из третьего уравнения следует

$$g_5 = x \left( \frac{9i}{64} + \frac{3}{2} A_3 \right) + i \left( \frac{1}{8} \sin x + \frac{11}{128} \sin 2x - \frac{1}{32} \cos x \right) + A_5.$$

Чтобы функция была ограничена при  $x \rightarrow \infty$ , необходимо положить

$$\frac{9i}{64} + \frac{3}{2} A_3 = 0,$$

что даёт

$$A_3 = -\frac{3i}{32}.$$

Таким образом находятся все ограниченные решения  $g_k(x)$ .

Асимптотическое разложение имеет вид:

$$y(x) = (x + \sin x)^{-1/4} \exp \left( i \int_1^x \sqrt{t + \sin t} dt \right) \left( 1 - \frac{i \cos x}{8x^{3/2}} - \frac{3i}{32x^{3/2}} - \frac{\sin x}{16x^2} + i \frac{16 \sin x + 11 \sin 2x - 4 \cos x}{128x^{5/2}} + \frac{i}{640x^{5/2}} + O(x^{-3}) \right).$$

Если сделать замену функции со знаком " $-1$ " в экспоненте:

$$y(x) = z(x) q^{-1/4}(x) \exp(-iS(x)),$$

то получим асимптотическое разложение второго решения:

$$y(x) = (x + \sin x)^{-1/4} \exp \left( -i \int_1^x \sqrt{t + \sin t} dt \right) \left( 1 + \frac{i \cos x}{8x^{3/2}} + \frac{3i}{32x^{3/2}} - \frac{\sin x}{16x^2} - i \frac{16 \sin x + 11 \sin 2x - 4 \cos x}{128x^{5/2}} - \frac{i}{640x^{5/2}} + O(x^{-3}) \right).$$

## 5.2 Задачи для самостоятельного решения

Найти главную асимптотику при  $x \rightarrow \infty$  линейно независимых решений уравнений:

1.  $y'' + \frac{y'}{x} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) y = 0.$

2.  $y'' + [1 + x^{-1}(1 + \sin x)]y = 0.$

3.  $y'' + e^{2x}y = 0.$

4.  $y''' + \left(4 + \frac{1}{x^2}\right) y'' + \left(1 + \frac{3}{x^{3/2}}\right) y' - \left(6 + \frac{1}{x^{5/2}}\right) y = 0.$

Выписать три члена асимптотики при  $x \rightarrow \infty$  общего решения уравнения

5.  $2xy'' + 5y' - 2u = 0.$

6.  $y'' - (x^6 + 4x^5)y = 0.$

7.  $y'' + (4x^2 + x^4)y = 0.$

8.  $y'' + 2 \operatorname{sh} 2x \cdot y = 0.$

### 5.3 Ответы

1.  $y_{1,2} = \frac{e^{\pm ix}}{\sqrt{x}}(1 + O(x^{-1})), x \rightarrow \infty.$

2.  $y_{1,2} = \exp(\pm i[x + \ln x])[1 + o(1)], x \rightarrow \infty.$  Указание: теорема С.

3.  $y_1 = e^{-x/2}(\cos e^x + O(e^{-x})), y_2 = e^{-x/2}(\sin e^x + O(e^{-x})).$

4.  $y_1 = e^x(1 + o(1)), y_2 = e^{-2x}(1 + o(1)), y_3 = e^{-3x}(1 + o(1)).$

5.  $y_{1,2} = x^{-1}e^{\pm 2\sqrt{x}} \left(1 \mp \frac{1}{2\sqrt{x}}\right).$

6.  $y_1 = x^{-\frac{23}{2}} \exp\left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} - x^2 + 4x\right) \left(1 - \frac{29}{x} + \frac{929}{2x^2} + O(x^{-3})\right),$   
 $y_2 = x^{\frac{17}{2}} \exp\left(-\frac{x^4}{4} - \frac{2x^3}{3} + x^2 - 4x\right) \left(1 + \frac{27}{x} + \frac{649}{2x^2} + O(x^{-3})\right).$

Указание: сделать только замену функции  $y(x) = z(x)q^{-1/4}(x)\exp(\pm S(x)), S(x) = \int_a^x \sqrt{q(t)}dt$  и асимптотическое разложение  $z(x)$  искать в виде  $1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k x^{-k}.$

7.  $y_{1,2} = x^{-1} \exp\left[\pm i\left(\frac{x^3}{3} + 2x\right)\right] \left(1 \pm \frac{2i}{x} - \frac{3}{x^2} + O(x^{-3})\right).$

8.  $y_{1,2} = \exp\left(\pm ie^x - \frac{x}{2}\right) \left(1 \mp \frac{ie^{-x}}{8} - \frac{9e^{-2x}}{128} + O(e^{-3x})\right).$

Указание: сделать замену  $s = e^x$ , а затем совершить первую замену Лиувилля и применить теорему 2.

# Литература

- [1] Даишев Р.А. Дифференциальные уравнения / Р.А. Даишев, А.Ю. Даньшин – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 150 с.
- [2] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 54 с.
- [3] Мухарлямов Р.К. Обыкновенные дифференциальные уравнения высших порядков / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КГУ, 2009. – 58 с.
- [4] Мухарлямов Р.К. Системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: Изд. КФУ, 2013. – 30 с.
- [5] Егоров А. И. Дифференциальные уравнения для инженерных направлений / А. И. Егоров Р.К. Мухарлямов, Т.Н. Панкратьева – Казань: КФУ, 2013. – 52 с.
- [6] Эрдейи А. Асимптотические разложения / А. Эрдейи – М.: Физматгиз, 1962. – 127 с.

- [7] Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2015. – 544 с.
- [8] Федорюк М.В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений / М.В. Федорюк – М.: Либроком, 2009. – 352 с.
- [9] Ильин А.М., Асимптотические методы в анализе / А.М. Ильин, А.Р. Данилин – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009. – 248 с.
- [10] Беллман Р. Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений / Р. Беллман – М.: И\*Л, 1954. – 215 с.

Р. К. Мухарлямов, Т. Н. Панкратьева

**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ  
В ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ**

**Часть I**

*Учебно-методическое пособие*

Отпечатано в полном соответствии с предоставленным оригинал-макетом

Подписано в печать 03.06.2016.

Форм. 60×84 1/16. Гарнитура "Таймс". Печать ризографическая.

Печ. л 3.0. Тираж 50. Заказ 134.

Лаборатория оперативной полиграфии Издательства КФУ

420012, Казань, ул. Бутлерова 4

Тел. 291-13-88, 291-13-47